

Početní část 1 - 21.6.2022

1. Uvažme 2π -periodickou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou pro $x \in (-\pi, \pi]$ předpisem $f(x) = (x - \frac{\pi}{2})^2$.

- (a) Rozviňte f v trigonometrickou Fourierovu řadu s periodou 2π .
- (b) Vyšetřete bodovou a (lokálně) stejnoměrnou konvergenci této řady.
- (c) Dokažte (například pomocí Parsevalovy rovnosti), že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

Můžete využít známou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(10 bodů)

2. Uvažme funkci $f(z) = \frac{3z^2 - z + 6}{z^3 - 3z^2 + z - 3}$.

- (a) Nalezněte maximální mezikruží se středem v bodě i obsahující bod $-2i$, na kterém je f holomorfní.
- (b) Na tomto mezikruží spočtěte Laurentovu řadu funkce f .

(8 bodů)